160. 四元数群ヲgalois群ニ持ツp進数体上ノ体ノ構成ニツイテ

（東北大） 国吉 秀夫

p進数体上ニテ 任意ノ可解群ヲ galois 群ニ持ツ体ノ構式ハ、可能カドウカ分リマセンガ、四元数体ノトキハ可能デアル。前ニコノ事ヲ仮定シテ p進体ニ於ケル

一、二ノ反例ニツイテ述ベタコトガアルノデ、次ニ証明ヲ掲ゲル。

1. ソノヤウナ体ノ構成ニツイテ、淡中先生ノ論文（東北数学雑誌．Vol. 43 (1937)）ヨリ必要ナ所ダケ取ル。

$\mathfrak{G}$ p群　$\mathfrak{G}/\mathfrak{G}' = P$　abel群。$\mathfrak{G}'$ p次デ、シカモ核心トスル。ソノトキ、$\mathfrak{G}$ ヲ $\mathfrak{G}'$ ノ P ニヨル拡大ト考エル。

$$\begin{cases} u_\sigma u_\tau = g_{\sigma,\tau} u_{\sigma\tau} & \sigma,\tau \in P \\ u_\sigma g = g u_\sigma & g,\ g_{\sigma,\tau} \in \mathfrak{G}' \\ g_{\sigma,\tau} g_{\rho,\sigma\tau} = g_{\rho,\sigma} g_{\rho\sigma,\tau} & \end{cases}$$

今 k ガ 1 ノ p 乗根ヲ含ミ、P ヲ galois 群ニ持ツ体 K ガ存在シタト仮定ス。$\mathfrak{G}'$ ノ erzeugende Charakter ヲ χ トスルトキ

(*)　$(\chi(g_{\sigma,\tau}),\ K/k,\ T) \sim k$

ガ成立スルナラバ、求ムル体ガ構成出来ル。

（証明）(*) ヨリ
$$\chi(g_{\sigma,\tau}) = \frac{\delta_\sigma^\tau \delta_\tau}{\delta_{\sigma\tau}} \qquad (\delta_\sigma \in K)$$
$$1 = \chi(g_{\sigma,\tau})^p = \frac{(\delta_\sigma^p)^\tau \delta_\tau^p}{\delta_{\sigma\tau}^p}$$
$$\delta_\sigma^p = \gamma^{\sigma-1}$$
ソノトキ $K(\theta)$, $\theta = \sqrt[p]{\gamma}$ ハ求ムル体デアル。　　q.e.d.

2. 四元数群ハ
$$\alpha^4 = \beta^4 = \gamma^4 = 1, \qquad \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \varepsilon$$
$$\beta\gamma = \alpha,\quad \gamma\alpha = \beta,\quad \alpha\beta = \gamma$$
$$\gamma\beta = \alpha^{-1},\quad \alpha\gamma = \beta^{-1},\quad \beta\alpha = \gamma^{-1}$$
ソコデ、$\{\varepsilon\}$ ガ交換子群、核心、2次、故ニ II ニヨリ、P ニ対スル K ノ存在ト、(*) トヲ証明スレバヨイ。

$u_\alpha = \alpha,\ u_\beta = \beta,\ u_\gamma = \gamma$ トオケバ
$$g_{\alpha,\alpha} = g_{\beta,\beta} = g_{\gamma,\gamma} = \varepsilon.$$
$$g_{\alpha,\beta} = g_{\beta,\gamma} = g_{\gamma,\alpha} = 1.$$
$$g_{\beta,\alpha} = g_{\gamma,\beta} = g_{\alpha,\gamma} = \varepsilon.$$

Lemma. p進数体ニテ K/k (2,2)型ノ abel 体トスレバ

$$\mathfrak{a} = (\chi(g_{\alpha},\tau).K/k,P)$$

ハ多元体デハナイ。

(証明) $F(\alpha, \chi(g_{\alpha}.\tau)) = \chi(g_{1,\alpha}\, g_{\alpha,\alpha}\, g_{\beta,\alpha}\, g_{\gamma,\alpha})$

$$= \chi(1\cdot\varepsilon\cdot\varepsilon\cdot 1) = \chi(1)$$

$$= 1 \quad (N^{*}K/k)$$

γ, β ニ関シテモ同様デアルカラ中山ー秋月ノ定理ニヨリ $\mathfrak{a}$ ハ多元体デハナイ。

今 p 進数体 $\bar{k}$ 上ニ2次体ガ少クトモ四個存在スルヤウナ $\bar{k}$ ヲ考ヘル。即チ. p ガ(2)ノ約数デアルトスル。之ハ类体論デヨク知ラレタ公式 $(\bar{k}:\bar{k}^{\times n}) = n^2 N(\mathfrak{g}^{e})$ ニヨル。但シ n ガ丁度 p^e デ割レルモノトスル。)

$k_1.\ k_2.\ k_3,\ k\ \cdots$ ヲ4箇ノ2次体トスレバ.

$k_1\ k_2$ ノ合成体 $\bar{K}$ ハ2次ノ中間体ヲ3個有スルカラ $k_3\ k_4$ ノ内1個ハ含マナイ。ソレヲ k トスル。4個ノ体ノ合成体ヲ K トスレバ K/k (或ヒハ. $\bar{K}/\bar{k}$) ヲ拡大シテ求メル体ヲ得ル。

(証明) $\bar{K}/\bar{k}$ ニ上ノ Lemma ヲ用ヒレバ $\mathfrak{a}$ ノ Exp. ハ 1カ2デアル。

$\therefore\ (\chi(g_{\alpha},\tau),K/k,P) \sim (\chi(g_{\alpha},\tau),\bar{K}/\bar{k},P)_k = \mathfrak{a}_k \sim 1$

以上マトメテ. q.e.d.

定理 $(k:R_{(2)})$ ガ.2ノ倍数ナラバ k 上ニ四元数体ヲ galois 群ニ持ツヤウナ体ガ少クトモ1ツ存在スル。(但シ $R_{(2)}$ ハ有理数体 R ノ(2)ー進数体)

上ト同様ノ証明デ任意ノ p 群ノ場合モ適当ナ基礎体ノ上ニ之ヲ Galois 群ニ持ツ体ガ存在スル。只基礎体ニ関スル條件ガ荒ッポクナル。